

TRANSFORMADAS DE FOURIER

Material para complementar 2001
Organizado no dia 6 de Maio de 2003

Curso de Ciências da Computação

Prof. Ulysses Sodré

Copyright ©2002 Ulysses Sodré. Todos os direitos reservados.

email: <ulysses@sercomtel.com.br>

email: <ulysses@matematica.uel.br>

Esta compilação foi realizada no dia 6 de Maio de 2003.

Este material pode ser usado por docentes e alunos desde que citada a fonte, mas não pode ser vendido e nem mesmo utilizado por qualquer pessoa ou entidade para auferir lucros.

Para conhecer centenas de aplicações da Matemática, visite a Home Page:

<http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/>

Ora, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam e a prova das coisas que não se vêem. Porque por ela os antigos alcançaram bom testemunho. Pela fé entendemos que os mundos foram criados pela palavra de Deus; de modo que o visível não foi feito daquilo que se vê. HEBREUS 11:1-3, Bíblia Sagrada.

Conteúdo

1	Sinais periódicos, simetrias e Séries de Fourier	1
1.1	Períodos e frequências de sinais	1
1.2	Duração de um sinal	2
1.3	Um sinal simples (senóide) no domínio do tempo	2
1.4	Exemplo com um sinal sinusoidal	3
1.5	Três tipos importantes de simetrias	3
1.6	Série de Fourier com coeficientes reais	4
1.7	Série de Fourier com coeficientes complexos	4
1.8	Condições para a existência de uma série de Fourier	5
1.9	Simetria de meia-onda e coeficientes reais	5
1.10	Exemplo de sinal com simetria de meia-onda	7
1.11	Simetria de meia-onda e coeficientes complexos	7
1.12	Simetrias par e ímpar e coeficientes complexos	8
2	Espectros discretos de frequência	9
2.1	Um sinal simples no domínio da frequência	9
2.2	Motivos para estudar espectros de Fourier	10
2.3	Representações de um sinal periódico	10
2.4	Espectros discretos de sinais periódicos	11
2.5	Exemplo gráfico em que o período é igual à duração	11
2.6	Exemplo em que a duração é menor do que o período	13
2.7	Função sinc	14
2.8	O último exemplo à luz da função sinc(.)	14
3	Conceitos importantes da Análise Matemática	18
3.1	Funções integráveis (segundo Riemann)	18
3.2	Funções absolutamente integráveis	18
3.3	Exemplos de funções absolutamente integráveis	18
3.4	O espaço de Schwarz	19
3.5	Informações sobre o espaço de Schwarz	19
3.6	Alguns teoremas importantes da Análise	20
3.6.1	Integral por partes	20
3.6.2	Integral por substituição	20
3.6.3	Teorema do valor médio para integrais	20
3.6.4	Derivada sob o sinal de integral	20
3.6.5	Regra de Leibniz	21
4	Transformada de Fourier	21
4.1	Transformada de Laplace	21
4.2	Definição de Transformada de Fourier	22
4.3	Transformada de Fourier e funções absolutamente integráveis	22
4.4	Transformada de Fourier em função de f_0	23
4.5	Transformada de Fourier em função de ω_x	23
4.6	Transformada de Fourier da função característica	23
4.7	Exemplo com uma função exponencial decrescente	24
4.8	Exemplo com uma função exponencial crescente	24

5	Espectros contínuos da Transformada de Fourier	25
5.1	Espectros, Amplitude e Fase	25
5.2	Exemplo	26
6	Propriedades da Transformada de Fourier	26
6.1	Translação no tempo	26
6.2	Translação na frequência	27
6.3	Homotetia (escala) na variável	27
6.4	Exemplo	28
7	Transformada Inversa de Fourier	29
8	Transformadas direta e inversa de Fourier	30
8.1	Pares de transformadas	30
8.2	Propriedades Lineares	30
8.3	Exemplo	31
8.4	Exemplo complexo com um par de transformadas	31
8.4.1	Transformada direta	31
8.4.2	Transformada inversa	32
8.4.3	Conclusão	34
9	Convolução de Funções	34
9.1	Produto de transformadas e a convolução	34
9.2	Definição de convolução	34
9.3	Propriedades da convolução	34
9.4	Alguns exercícios importantes	35
10	A distribuição delta de Dirac	35
10.1	Elementos gerais sobre δ	35
10.2	Função degrau unitário e função característica	36
10.3	A distribuição δ como limite de funções reais	36
10.4	Mais rigor matemático com a distribuição δ	37
10.5	Propriedades da distribuição δ de Dirac	37
10.6	Propriedade gráfica de δ com a convolução	39
11	Transformada de Fourier da convolução	39
11.1	Transformada de Fourier da distribuição δ	39
12	Transformadas de Fourier de Derivadas	40
12.1	Transformadas de derivadas parciais	40
13	Solução da Equação do Calor	41
13.1	Observação sobre este material	43

1 Sinais periódicos, simetrias e Séries de Fourier

1.1 Períodos e frequências de sinais

Um sinal (ou função) $s = s(t)$ é dito periódico, se existe um menor número real *positivo* T , denominado período fundamental para este sinal, tal que para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$s(t) = s(t + T)$$

O período T de um sinal caracteriza o número de T radianos necessários para que o sinal $s = s(t)$ volte a ter a mesma forma inicial.

Para um sinal T -periódico, a medida do inverso de T :

$$f_0 = \frac{1}{T} \quad [\text{Hertz}]$$

é denominada a *frequência fundamental* deste sinal. Este número, mede o número de vezes que ocorre a repetição deste sinal no período T .

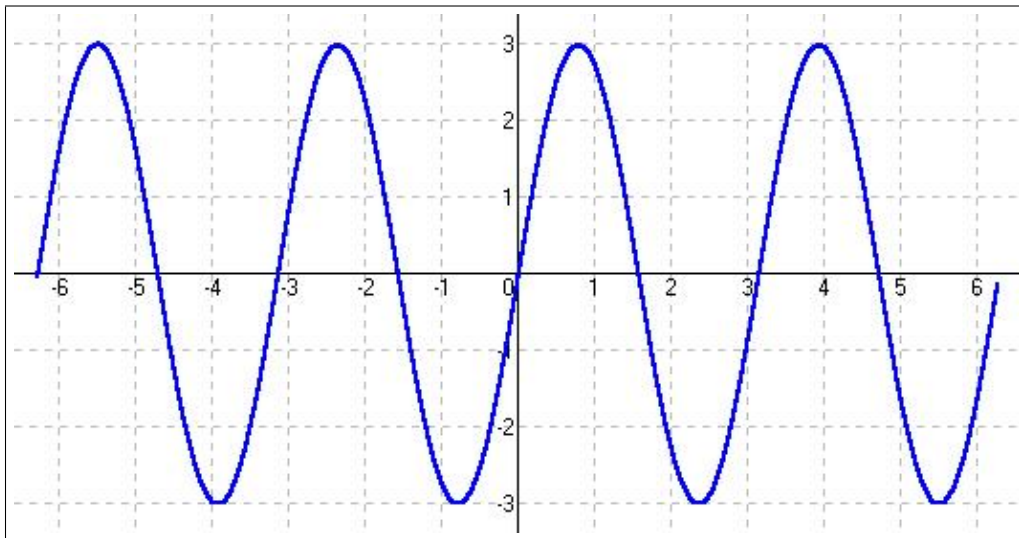


Figura 1: Gráfico da senóide $s(t) = 3 \cos(2t - \pi/2)$

Para o sinal do gráfico acima, temos que $f_0 = 1/\pi$. A frequência fundamental f_0 , medida em $[\text{rad/s}]$, é a velocidade do sinal para dar 1 volta completa no período T . Como uma volta completa mede 2π radianos, definimos a *frequência angular* deste sinal como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_0$$

Para o sinal $s(t) = 3 \cos(2t - \pi/2)$, temos que $\omega = 2$, o que significa que $s = s(t)$ se repete 2 vezes enquanto o parâmetro t percorre um intervalo de comprimento 2π , por exemplo, o intervalo $[0, 2\pi]$.

Na literatura, é bastante comum encontrarmos a frequência angular ω indicada simplesmente como a *frequência*.

1.2 Duração de um sinal

Se um sinal $s = s(t)$ é T -periódico, definimos a duração d deste sinal como o tempo que o sinal não se anulou dentro do período T .

1.3 Um sinal simples (senóide) no domínio do tempo

Um sinal simples pode ser representado graficamente por uma função sinusoidal (senóide ou cossenóide) e pode ser escrito na forma geral

$$s(t) = A_0 + C_1 \cos(\omega t + \theta)$$

Os quatro parâmetros que caracterizam este sinal, são:

1. A_0 é a altura média do sinal em relação ao eixo das abscissas.
2. C_1 é a amplitude do sinal que é a altura da oscilação.
3. ω é a frequência angular [rad/s] que indica a medida de uma volta completa no período T do sinal.
4. θ é o ângulo de fase ou o deslocamento da fase, que mede o quanto a curva está deslocada horizontalmente para a direita.

Da trigonometria elementar, temos que:

$$\cos(\omega t + \theta) = \cos(\omega t) \cos(\theta) - \sin(\omega t) \sin(\theta)$$

logo

$$s(t) = A_0 + C_1 [\cos(\omega t) \cos(\theta) - \sin(\omega t) \sin(\theta)]$$

Para reduzir a expressão acima, tomamos:

$$A_1 = C_1 \cos(\theta) \quad \text{e} \quad B_1 = -C_1 \sin(\theta)$$

e com estes novos parâmetros, escrevemos

$$s(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t) + B_1 \sin(\omega t)$$

Mostramos assim que, todo sinal sinusoidal pode ser expresso como uma combinação linear de $\cos(\cdot)$ e $\sin(\cdot)$, deslocado de uma medida vertical A_0 . Se os valores de A_1 e B_1 são dados, podemos obter C_1 e o ângulo de fase θ .

1.4 Exemplo com um sinal sinusoidal

Como uma senóide tem a forma geral $s(t) = A_0 + C_1 \cos(\omega t + \theta)$ tomaremos o sinal

$$s(t) = 3 \cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Neste caso, a amplitude é igual a 3, a frequência angular é 2, o ângulo de fase é $-\pi/2$ e $A_0 = 0$ o que indica que a translação vertical deste sinal é nula.

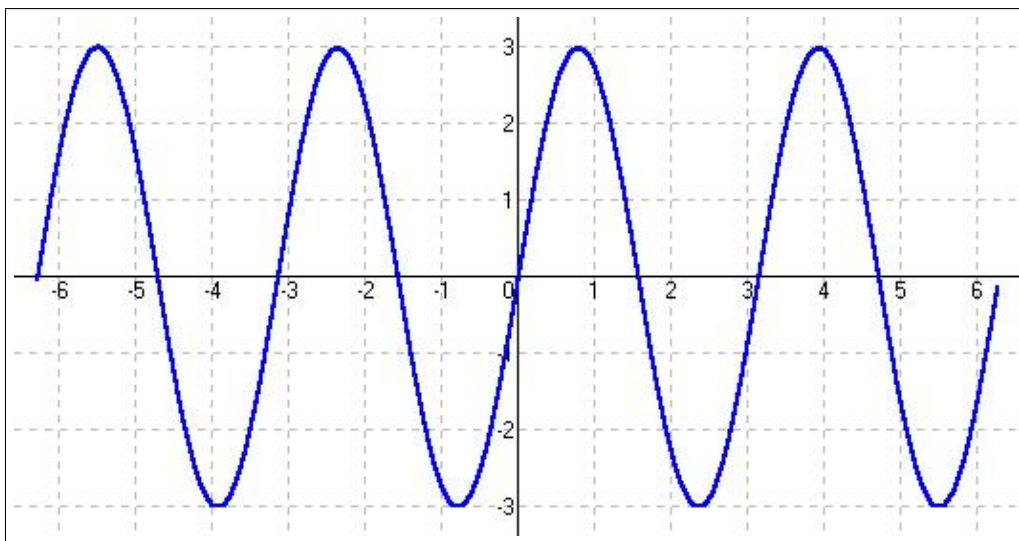


Figura 2: Gráfico de uma senóide

1.5 Três tipos importantes de simetrias

Consideremos um sinal $s = s(t)$ de período T . Dizemos que $s = s(t)$ tem simetria

1. **par**, se para todo $t \in R$, $s(-t) = s(t)$.
2. **ímpar**, se para todo $t \in R$, $s(-t) = -s(t)$.
3. de **meia-onda**, se para todo $t \in R$, $s(t + \frac{T}{2}) = -s(t)$. Geometricamente, o gráfico da segunda metade do sinal $s = s(t)$ no período T é a reflexão do gráfico da primeira metade de $s = s(t)$ em relação ao eixo dos tempos, transladada (deslocada) de $\frac{T}{2}$ para a direita. Um exemplo disso pode ser visto no gráfico.

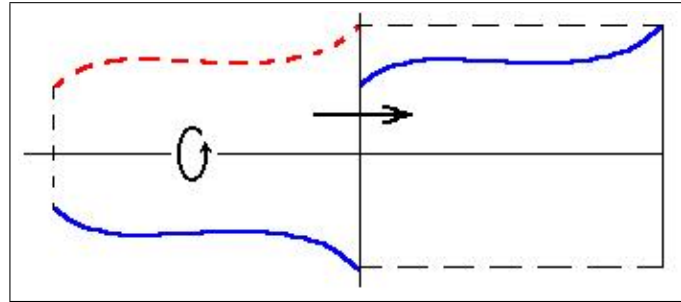


Figura 3: Sinal de meia-onda

1.6 Série de Fourier com coeficientes reais

Se $s = s(t)$ é uma função T -periódica, então podemos escrever a série de Fourier de $s = s(t)$, como:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) \right]$$

onde

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin\left(\frac{2n\pi t}{T}\right) dt$$

Tomando a frequência angular como $\omega = 2\pi/T$, poderemos escrever uma expressão onde aparecem poucas frações:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right]$$

onde a_n e b_n são, respectivamente, as amplitudes das funções $\cos(n\omega t)$ e $\sin(n\omega t)$ e os argumentos $n\omega$ são múltiplos inteiros **positivos** da frequência angular.

1.7 Série de Fourier com coeficientes complexos

Podemos representar um sinal T -periódica através de uma série de Fourier complexa. A idéia básica é escrever a série de Fourier de $s =$

$s(t)$ em qualquer uma das formas complexas:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n t / T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n \omega t}$$

onde $\omega = 2\pi/T$ e n é um número inteiro. Os coeficientes de Fourier complexos da função $s = s(t)$, são dados por qualquer das duas integrais:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-2\pi i n t / T} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{i n \omega t} dt$$

1.8 Condições para a existência de uma série de Fourier

Para construir a série de Fourier de uma função $s = s(t)$, devemos exigir que:

1. Esta série seja uniformemente convergente para $s = s(t)$;
2. As funções envolvidas nos cálculos sejam absolutamente integráveis e como consequência disso, integráveis;
3. A função $s = s(t)$ seja seccionalmente diferenciável.

Muitas vezes algumas dessas condições se sobrepõem e são desnecessárias. Se $s = s(t)$ é uma função T -periódica, então esta função possui componentes $\cos(n\omega t)$ e $\sin(n\omega t)$ cujos argumentos são frequências múltiplas **inteiras** da frequência angular ω do sinal.

1.9 Simetria de meia-onda e coeficientes reais

A série de Fourier de $s = s(t)$ com coeficientes reais pode ser posta na forma

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

onde $\omega = 2\pi/T$. Para cada $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \begin{pmatrix} \cos(n\omega t) \\ \sin(n\omega t) \end{pmatrix} dt$$

e

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt$$

A simetria de meia-onda garante que os **todos os coeficientes com índices pares** para a série de Fourier de $s = s(t)$ se anularão, isto é, para todo

$n = 0, 2, 4, \dots$, $a_n = b_n = 0$. Calcularemos apenas os coeficientes com índices ímpares. Realmente,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T s(t) \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_{T/2}^T s(t) \cos(n\omega t) dt \end{aligned}$$

Com a mudança de variável $v = t - \frac{T}{2}$ na segunda integral, obtemos

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s\left(t + \frac{T}{2}\right) \cos\left[n\omega\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] dt$$

Como $\cos\left[n\omega\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] = (-1)^n \cos(n\omega t)$ e como $s\left(t + \frac{T}{2}\right) = -s(t)$, podemos escrever

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega t) dt + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} -s(t) (-1)^n \cos(n\omega t) dt$$

Utilizando a mesma variável muda u nas duas integrais, teremos

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(u) \cos(n\omega u) du + \frac{2}{T} \int_0^{T/2} -s(u) (-1)^n \cos(n\omega u) du$$

e estas integrais podem ser incorporadas em apenas uma integral

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(u) \cos(n\omega u) [1 - (-1)^n] du$$

Se n é par, então $a_n = 0$ e se n é ímpar, temos que

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(u) \cos(n\omega u) du$$

De forma análoga, podemos mostrar que, para n par segue que $b_n = 0$ e para n ímpar, temos que

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} s(u) \sin(n\omega u) du$$

1.10 Exemplo de sinal com simetria de meia-onda

Consideremos o sinal $s = s(t)$ de período $T = 2\pi$ definido por

$$s(t) = \begin{cases} t & \text{se } -\pi < t < 0 \\ \pi - t & \text{se } 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

A frequência angular é $\omega = 1$. Pelas análises anteriores, $a_n = b_n = 0$ se n é par e quando n é ímpar:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \cos(nt) dt = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \frac{-2}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \sin(nt) dt = -\frac{(-1)^n}{n} = \frac{1}{n}$$

Desse modo, a série de Fourier é dada por

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \text{ ímpar}} \left[\frac{-2}{\pi n^2} \cos(nt) + \frac{1}{n} \sin(nt) \right]$$

1.11 Simetria de meia-onda e coeficientes complexos

Um sinal $s = s(t)$ T -periódico com simetria de *meia-onda*, possui a propriedade $s(t + \frac{T}{2}) = -s(t)$ para todo $t \in R$. A expansão em série de Fourier com coeficientes complexos para este sinal $s = s(t)$, terá a forma

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}$$

onde $\omega = 2\pi/T$ e para cada $n \in Z$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-in\omega t} dt$$

A simetria de meia-onda garante que os **todos os coeficientes complexos com índices pares** para a série de Fourier de $s = s(t)$ se anularão, isto é, para todo $n = 0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots$, teremos $c_n = 0$ e deveremos apenas calcular os coeficientes com índices ímpares. Realmente,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T s(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s(t) e^{-in\omega t} dt + \frac{1}{T} \int_{T/2}^T s(t) e^{-in\omega t} dt \end{aligned}$$

Com a mudança de variável $v = t - \frac{T}{2}$ na segunda integral, obtemos

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s(t) e^{-in\omega t} dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s(v + T/2) e^{-in\omega(v + T/2)} dv$$

Como $e^{-in\omega(v+T/2)} = (-1)^n e^{-in\omega v}$ e como $s(t + \frac{T}{2}) = -s(t)$, escreveremos

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s(t) e^{-in\omega t} dt + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} -s(v) (-1)^n e^{-in\omega v} dv$$

Com a mesma variável muda u nas duas integrais, escrevemos

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s(u) e^{-in\omega u} du + \frac{1}{T} \int_0^{T/2} -s(u) (-1)^n e^{-in\omega u} du$$

e reunindo estas duas integrais em apenas uma integral, teremos

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} s(u) e^{-in\omega u} [1 - (-1)^n] du$$

A expressão em colchetes determina o valor. Se n é par, então $c_n = 0$ e se n é ímpar, temos que

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(u) \cos(n\omega u) du$$

De modo análogo, se n é par $b_n = 0$ e se n é ímpar, temos que

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(u) e^{-in\omega u} du$$

1.12 Simetrias par e ímpar e coeficientes complexos

Se $s = s(t)$ é um sinal T -periódico **par**, então

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) [\cos(n\omega t) - i \sin(n\omega t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega t) dt - i \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega t) dt + 0 \end{aligned}$$

A última integral se anula, pois o integrando é uma função ímpar obtida pelo produto de um sinal par $s = s(t)$ pela função $\sin()$ que é ímpar. Basta realizar a primeira integral que possui um integrando *par* para obter

$$c_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} s(t) \cos(n\omega t) dt$$

Se $s = s(t)$ é um sinal T -periódico **ímpar**, então

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-in\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) [\cos(n\omega t) - i \sin(n\omega t)] dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos(n\omega t) dt - i \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega t) dt \\ &= 0 + \frac{i}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin(n\omega t) dt \end{aligned}$$

A primeira integral se anula, pois o integrando é uma função ímpar obtida pelo produto de $s = s(t)$ que é ímpar e de $\cos()$ que é par. Basta realizar a segunda integral que possui um integrando *par* para obter

$$c_n = \frac{2i}{T} \int_0^{T/2} s(t) \sin(n\omega t) dt$$

2 Espectros discretos de frequência

2.1 Um sinal simples no domínio da frequência

Se t é a variável tempo, um sinal sinusoidal *simples* $s = s(t)$ pode ser escrito na forma

$$s(t) = A_0 + C_1 \cos(\omega t + \theta)$$

Há uma forma **diferente** que proporciona uma análise do sinal em função do comportamento oscilatório do mesmo. Podemos pensar que este sinal depende de dois parâmetros: ω a frequência angular e θ o ângulo de fase. Construimos os gráficos de duas funções no sistema cartesiano, em que o domínio de ambas é o (mesmo) conjunto de todos os múltiplos inteiros da frequência angular ω , mas as imagens mostram os comportamentos de ambas:

1. $C_1 = C_1(\omega)$ é a amplitude em função de ω .

2. $\theta = \theta(\omega)$ é o ângulo de fase em função de ω .

Com estas funções, é possível estudar o sinal $s = s(t)$ em função da frequência angular ω , donde provém o nome **sinal no domínio da frequência**.

2.2 Motivos para estudar espectros de Fourier

1. Séries de Fourier são utilizadas no estudo de sinais periódicos, enquanto que Transformadas de Fourier são utilizadas no estudo de sinais **não periódicos**.
2. Séries de Fourier e Transformadas de Fourier, quando usadas em conjunto, são adequadas para estudar o espectro de um sinal.
3. O espectro de um sinal é um objeto matemático apropriado para descrever, de uma forma bastante conveniente, um sinal a partir da variável que representa a frequência angular do sinal, do que através de uma curva em função do *tempo*, além de informar a medida da frequência do sinal.
4. Embora uma série de Fourier com coeficientes reais parece dar a impressão que pode ser obtida mais facilmente do que a série de Fourier com coeficientes complexos, às vezes, usamos a série complexa que possui características matemáticas do sinal de uma forma mais sintética, além de ser exatamente por este meio que podemos obter mais facilmente a fase e a amplitude do sinal.

2.3 Representações de um sinal periódico

Pela discussão anterior, já vimos que um sinal periódico $s = s(t)$, pode ser representado de dois modos equivalentes relacionados um com o outro: Representação no domínio do **tempo** ou no domínio da **frequência**. A representação no domínio da frequência depende das amplitudes e dos argumentos das componentes da série de Fourier complexa da função $s = s(t)$.

Como todo número complexo z tem uma representação na forma polar, o coeficiente de Fourier complexo c_n pode ser escrito como:

$$c_n = A_n e^{i\theta_n}$$

onde $A_n = |c_n|$ é a amplitude da n -ésima componente harmônica de $s = s(t)$ e $\theta_n = \arg(c_n)$ é o ângulo de fase de c_n , que é o ângulo formado entre o número complexo (pensado como um vetor) c_n e o eixo real OX .

2.4 Espectros discretos de sinais periódicos

Com relação aos espectros discretos básicos de um sinal $s = s(t)$:

1. O espectro de amplitude é o gráfico das amplitudes A_n em função das respectivas frequências de $s = s(t)$.
2. O espectro de fase é o gráfico das fases θ_n em função das respectivas frequências de $s = s(t)$.

Observação: Se $s = s(t)$ é uma função periódica **real**, o complexo conjugado de c_n coincide com c_{-n} e nesse caso temos:

$$c_{-n} = \overline{c_n}, \quad A_{-n} = |c_{-n}| = |c_n| = A_n$$

$$\arg(c_{-n}) = -\arg(c_n), \quad \theta(-c_n) = -\theta(c_n)$$

garantindo que o espectro de amplitude do sinal $s = s(t)$ é simétrico em relação ao eixo vertical (função par) e o seu espectro de fase é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano (função ímpar).

2.5 Exemplo gráfico em que o período é igual à duração

Seja a função sinal 2π -periódica (ímpar) definida por

$$s(t) = \text{sinal}(t) = \begin{cases} +1 & \text{se } 0 < t < \pi \\ -1 & \text{se } -\pi < t < 0 \end{cases}$$

Mostre que a série de Fourier complexa desta função é:

$$s(t) = \sum_{k \text{ ímpar}} -\frac{2i}{k\pi} e^{ikt}$$

Neste caso, o período é $T = 2\pi$ e a frequência angular é $\omega = 2\pi/T = 1$. Para cada k inteiro ímpar, temos:

$$A_k = \frac{2}{|k|\pi} \quad \text{e} \quad \theta_k = -\text{sinal}(k) \frac{\pi}{2}$$

Para cada k inteiro par, temos que $c_k = A_k = \theta_k = 0$

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
A_n	$\frac{2}{5\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$
θ_n	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$

Figura 4: Algumas amplitudes e fases em função das frequências

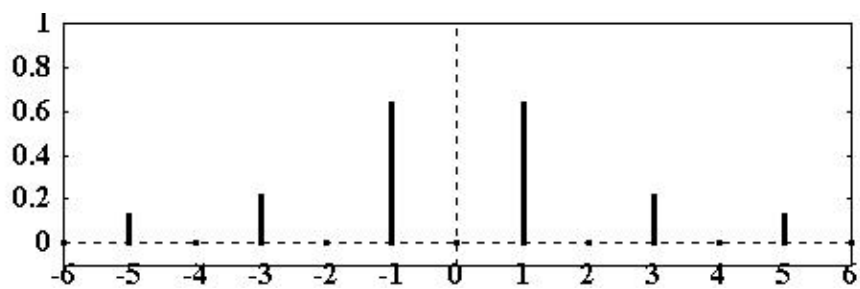


Figura 5: Gráfico das amplitudes em função das frequências

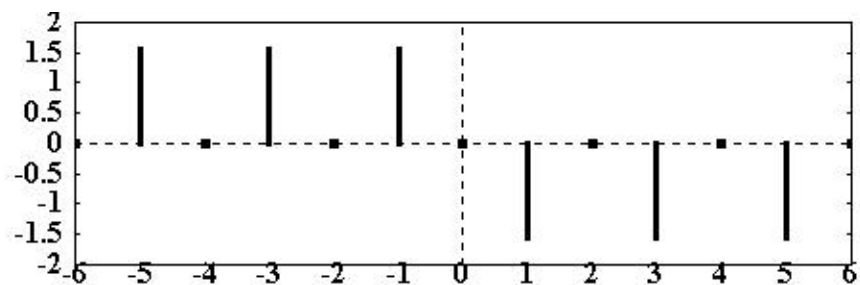


Figura 6: Gráfico das fases em função das frequências

2.6 Exemplo em que a duração é menor do que o período

Já definimos antes a duração d de um sinal T -periódico $s = s(t)$ como o tempo que o sinal permanece não nulo neste período T . Vamos considerar um sinal T -periódico com duração d , definido por:

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq d/2 \\ 0 & \text{se } |t| > d/2 \end{cases}$$

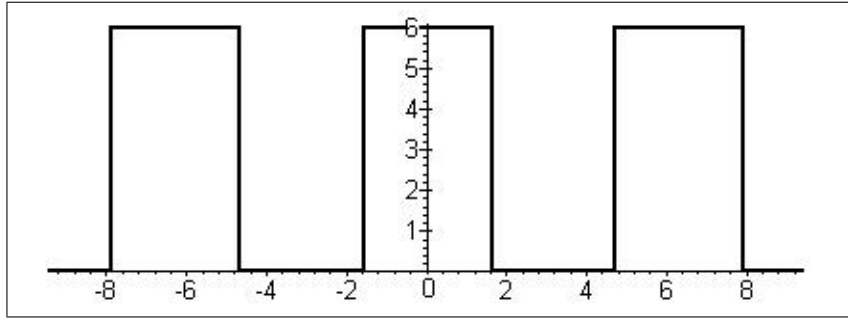


Figura 7: Pulso com $d = T/2$ e 3 “retângulos” no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$

Se tomarmos $\omega = 2\pi/T$ e a série de Fourier deste sinal como

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{2\pi i n t / T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i n \omega t} \quad (1)$$

então, para cada inteiro n inteiro, os coeficientes de Fourier complexos da função $s = s(t)$, serão dados por qualquer das integrais:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-2\pi i n t / T} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-i n \omega t} dt$$

e como $s = s(t)$ é não nula apenas no intervalo $[-d/2, d/2]$, então:

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-d/2}^{d/2} e^{-i n \omega t} dt$$

que pode ser reescrito como:

$$C_n = \frac{1}{T} \left[\int_{-d/2}^{d/2} \cos(n\omega t) dt - i \int_{-d/2}^{d/2} \sin(n\omega t) dt \right]$$

A segunda integral é nula, pois a função $\sin(\cdot)$ é ímpar no intervalo simétrico $[-d/2, d/2]$, logo:

$$C_n = \frac{2}{T n \omega} \sin\left(\frac{n d \omega}{2}\right) = \frac{1}{n \pi} \sin\left(\frac{n d \pi}{T}\right)$$

onde $n \in \mathbb{Z}$ e a série de Fourier complexa será escrita através de uma das formas:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{Tn\omega} \sin\left(\frac{nd\omega}{2}\right) e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{nd\pi}{T}\right) e^{2\pi int/T}$$

2.7 Função sinc

Em virtude do uso intenso e para simplificar as nossas notações, definiremos a função sinc para $x \in \mathbb{R}$, por:

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x\pi)}{x\pi} & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

O limite fundamental

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} = 1$$

garante que podemos definir $\text{sinc}(0) = 1$. Outro fato simples, mas de grande importância, é que $\text{sinc}(x) = 0$, para todo número inteiro x .

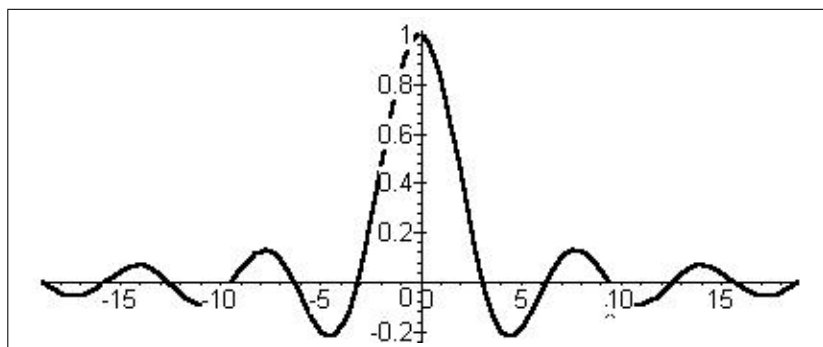


Figura 8: Gráfico da função sinc(.)

2.8 O último exemplo à luz da função sinc(.)

Consideremos a função

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| \leq d/2 \\ 0 & \text{se } |t| > d/2 \end{cases}$$

Como já obtivemos antes os coeficientes de Fourier c_n , então multiplicando e dividindo cada coeficiente por $\frac{n\pi d}{T}$, obtemos:

$$c_n = \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi T}{T}\right) = \frac{1}{n\pi} \frac{n\pi d}{T} \left[\frac{T}{n\pi d} \sin\left(\frac{n\pi d}{T}\right) \right]$$

que pode ser reescrito para cada $n \in \mathbb{Z}$, como

$$c_n = \frac{d}{T} \frac{\sin\left(\frac{nd\pi}{T}\right)}{\frac{nd\pi}{T}} = \frac{d}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{nd}{T}\right)$$

e a série de Fourier complexa pode então ser reescrita como:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{d}{T} \operatorname{sinc}\left(n\frac{d}{T}\right) e^{2\pi i n t/T}$$

Agora construiremos os espectros de amplitude A_n e de fase θ_n em função dos respectivos múltiplos da frequência fundamental $f_0 = 1/T$. Os gráficos serão construídos com barras verticais, respectivamente, de alturas A_n nas posições $n f_0$ do eixo das abscissas, para cada n inteiro.

A razão d/T entre a duração e o período é importante. Faremos várias análises para entender mais à frente a estreita ligação entre séries e transformadas de Fourier. Consideraremos os comportamentos das amplitudes A_n com a duração d fixa e os períodos T aumentando em função do valor d fixado.

1. $T = d$ Neste caso, $c_0 = 1$ e $c_n = 0$ para cada n inteiro não nulo.

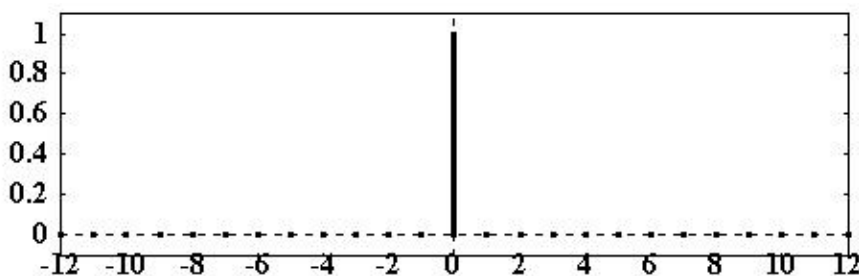
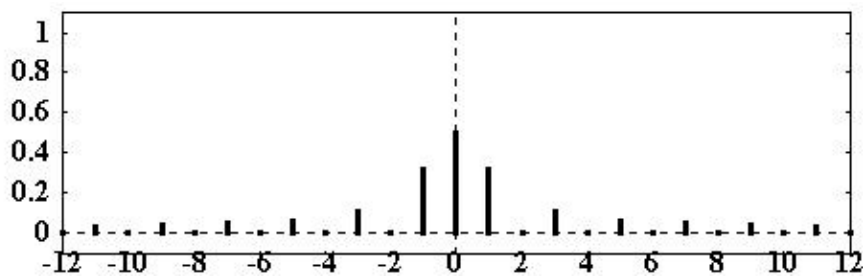


Figura 9: Gráfico das amplitudes com $T = d$

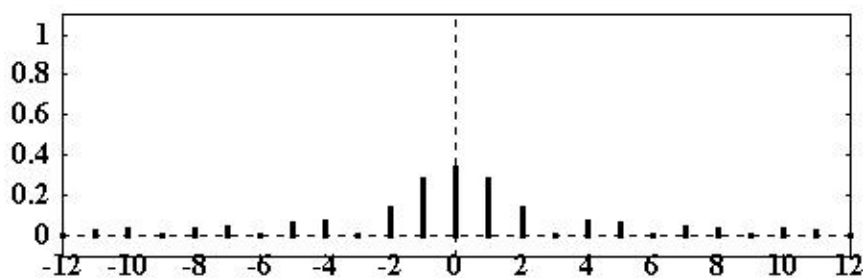
2. $T = 2d$ Neste caso $c_0 = 1/2$. Se n é par segue que $c_n = 0$ mas se n é ímpar

$$c_n = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

Figura 10: Gráfico das amplitudes com $T = 2d$

3. $T = 3d$ Neste caso, $c_0 = 1/3$ e se n é múltiplo inteiro de 3, segue que $c_n = 0$, mas se a divisão de n por 3 tem resto não nulo, temos que

$$c_n = \frac{1}{3} \text{sinc}\left(\frac{n}{3}\right)$$

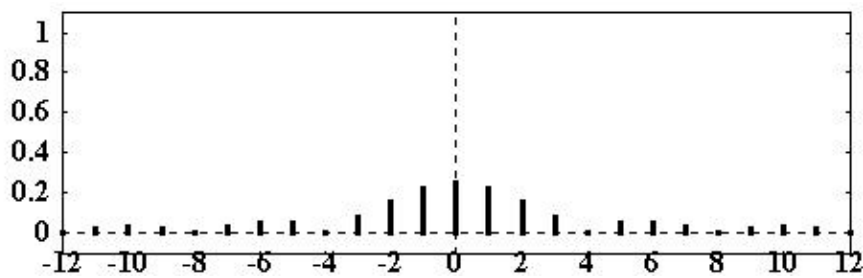
Figura 11: Gráfico das amplitudes com $T = 3d$

4. $T = kd$ Aqui $c_0 = 1/k$. Se n é múltiplo inteiro de k , segue que $c_n = 0$, mas se a divisão de n por k tem resto não nulo, segue que

$$c_n = \frac{1}{k} \text{sinc}\left(\frac{n}{k}\right)$$

Cada gráfico das amplitudes foi desenhado com:

- Uma barra vertical de altura igual a $1/k$ em $n = 0$,
- Barras verticais de alturas $\frac{1}{k} \text{sinc}\left(\frac{n}{k}\right)$ sobre os pontos de abscissas nf_0 , se n não é divisível por k ,
- bolinhas sobre os pontos de abscissas nf_0 , se n é não nulo e múltiplo de k .

Figura 12: Gráfico das amplitudes com $T = 4d$

Em cada caso, a frequência fundamental f_0 diminui à medida que o respectivo período T aumenta. Como a duração d do sinal está fixada, com o aumento do valor de k , existirão mais barras verticais entre dois múltiplos inteiros da frequência fundamental, em cada caso. Na sequência, veremos uma tabela com os cálculos dos coeficientes para os valores $k = 1, 2, \dots, 10$

$nf_0 \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$5f_0$	0,0	0,1	-0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1
$4f_0$	0,0	0,0	-0,1	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$3f_0$	0,0	-0,1	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$2f_0$	0,0	0,0	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$1f_0$	0,0	0,3	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1
0	1,0	0,5	0,3	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1
$-1f_0$	0,0	0,3	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1
$-2f_0$	0,0	0,0	0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$-3f_0$	0,0	-0,1	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$-4f_0$	0,0	0,0	-0,1	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$-5f_0$	0,0	0,1	-0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,1	0,1

Figura 13: Coeficientes de Fourier com $T = kd$ e a duração d fixada

3 Conceitos importantes da Análise Matemática

3.1 Funções integráveis (segundo Riemann)

Uma função real $f = f(x)$ é integrável (segundo Riemann) sobre R se

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx < \infty$$

isto é, se a integral de $f = f(x)$ sobre R é finita.

3.2 Funções absolutamente integráveis

Uma função real $f = f(x)$ é absolutamente integrável sobre R se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

isto é, se a integral do valor absoluto de $f = f(x)$ sobre R é finita.

3.3 Exemplos de funções absolutamente integráveis

1. A função característica do intervalo $[a, b]$

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{se } x \notin [a, b] \end{cases}$$

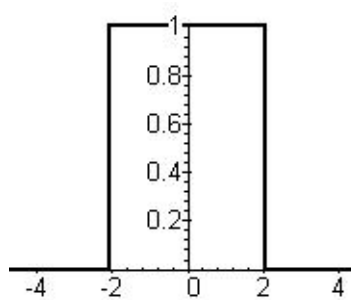


Figura 14: Gráfico da função característica de $[a, b]$

2. A função real racional $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. De fato, é finita a integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2 \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$$

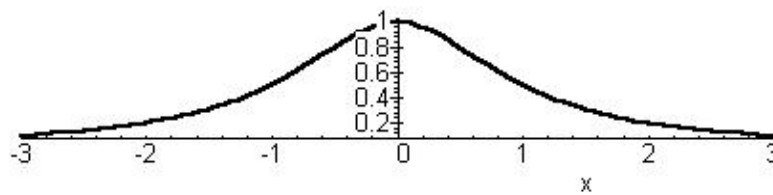


Figura 15: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ que é integrável sobre R

3. A função real $f(x) = e^{-x} u(x)$ definida para $x \in R$, sendo que $u = u(x)$ é a função degrau unitário de Heaviside, definida por:

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A partir da função degrau unitário, é possível definir:

$$u(-x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

4. A função real $f(x) = e^x u(-x)$ definida para $x \in R$.
5. As funções da classe $C^0(K)$, isto é, funções contínuas sobre um intervalo fechado e limitado K da reta.
6. As funções da classe $C^1(K)$, isto é, funções continuamente diferenciáveis sobre um intervalo fechado e limitado K da reta.
7. As funções da classe $C^\infty(K)$, isto é, funções continuamente infinitamente diferenciáveis sobre um intervalo fechado e limitado K da reta.

3.4 O espaço de Schwarz

O espaço de Schwarz, denotado por $S(R)$, é o conjunto das funções reais de classe $C^\infty(R)$ (possuem derivadas contínuas de todas as ordens) tal que, tanto f como todas as suas derivadas se aproximam de 0 quando $|x| \rightarrow \infty$.

3.5 Informações sobre o espaço de Schwarz

1. Gaussiana: Uma importantíssima função pertencente a este espaço é $g(x) = e^{-ax^2}$, onde $a > 0$.

2. O produto de uma função polinomial $p = p(x)$ pela função “gaussiana” do item (1) é uma função $h(x) = p(x) e^{-ax^2}$ que está no espaço $S(R)$.
3. Este conjunto $S(R)$ é um espaço vetorial de funções.
4. Se uma função pertence a este espaço $S(R)$, então a sua derivada também pertence a este mesmo espaço $S(R)$.
5. Propriedade antecipada de $S(R)$: Se uma função f pertence a $S(R)$, então a Transformada de Fourier de f está em $S(R)$. A transformada de Fourier de uma função será definida na sequência.

3.6 Alguns teoremas importantes da Análise

3.6.1 Integral por partes

Se $f, g \in C^1([a, b])$ então

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) v(x) dx$$

3.6.2 Integral por substituição

Se $h = h(y)$ é uma função diferenciável que pode substituir a variável x , isto é, $x = h(y)$ na integral de tal modo que $a = h(\alpha)$ e $b = h(\beta)$, então

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[h(y)] h'(y) dy$$

3.6.3 Teorema do valor médio para integrais

Se $f = f(x)$ é uma função contínua sobre um intervalo $K = [a, b]$, então existe um ponto c no intervalo aberto (a, b) tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

3.6.4 Derivada sob o sinal de integral

Se $f = f(x, t)$ é uma função contínua definida sobre $W = K \times [a, b]$ então

1. Podemos afirmar que é contínua a função $F = F(t)$ definida por

$$F(t) = \int_a^b f(x, t) dx$$

2. Podemos passar a derivada (parcial) para dentro da integral, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx$$

3.6.5 Regra de Leibniz

Se $f = f(x, t)$ uma função continuamente diferenciável (de classe C^1) nas duas variáveis, então podemos passar a derivada (parcial) para dentro da integral, mas muito maior cuidado deve ser observado aqui pois os limites de integração, agora são funções:

$$\frac{d}{dt} \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(\omega, t) d\omega = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f(\omega, t)}{\partial t} d\omega + \beta'(t)f(\beta(t), t) - \alpha'(t)f(\alpha(t), t)$$

4 Transformada de Fourier

4.1 Transformada de Laplace

Há uma relação íntima entre as Transformadas de Laplace e de Fourier. A Transformada de Laplace de uma função $h = h(t)$ absolutamente integrável, denotada por $L(s) = L(h(t))$, é definida para $s > 0$, por:

$$L(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-st} dt \quad (3)$$

Substituindo

$$s \text{ por } i\omega$$

e integrando agora sobre o intervalo

$$(-\infty, \infty)$$

teremos a transformada de Fourier.

4.2 Definição de Transformada de Fourier

A Transformada de Fourier de uma função $h = h(t)$ absolutamente integrável, denotada por $H(\cdot)$, é definida para $\omega \in \mathbb{R}$, por:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4)$$

Às vezes substituímos o parâmetro ω por f ou pelo símbolo ω_x .

4.3 Transformada de Fourier e funções absolutamente integráveis

O fato de $h = h(t)$ ser absolutamente integrável é suficiente **mas não é necessário** para a obtenção da Transformada de Fourier, pois existem funções que **não** são absolutamente integráveis mas possuem as suas Transformadas de Fourier, como é o caso da função $\text{sinc}(\cdot)$, agora definida por:

$$\text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases} \quad (5)$$

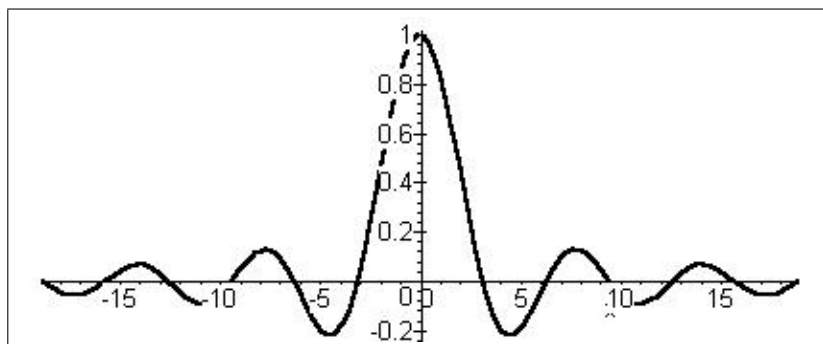


Figura 16: Gráfico da função $\text{sinc}(\cdot)$

Pode-se demonstrar com algum trabalho matemático que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \pi$$

mas

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| dt = +\infty$$

4.4 Transformada de Fourier em função de f_0

Tomando $\omega = 2\pi f_0$ na definição (4), obtemos a transformada de Fourier de $h = h(t)$ em função da frequência fundamental f_0 do sinal. Desse modo:

$$H(f_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2\pi i t f_0} dt \quad (6)$$

4.5 Transformada de Fourier em função de ω_x

Se, ao invés de considerar a variável t , usarmos a variável $x \in R$, deveremos substituir $h(t)$ por $h(x)$ e substituir a frequência fundamental f_0 por ω_x que é a frequência que depende de x . A transformada de Fourier ficará na forma:

$$H(\omega_x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-2\pi i x \omega_x} dx \quad (7)$$

Esta última forma pode ser estendida ao caso bi-dimensional:

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (x, y) \cdot (\omega_x, \omega_y)} dx dy \quad (8)$$

onde \cdot é o produto escalar de vetores no plano cartesiano.

4.6 Transformada de Fourier da função característica

Obteremos agora a Transformada de Fourier da importante função característica $h = h(t)$ definida sobre o intervalo $(-T, T)$, por:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in (-T, T) \\ 0 & \text{se } t \notin (-T, T) \end{cases}$$

Pela definição (4), temos que:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

logo

$$H(\omega) = \int_{-T}^T e^{-i\omega t} dt = \left[\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-T}^T = \frac{e^{-i\omega T} - e^{i\omega T}}{-i\omega}$$

Pela relação de Euler, podemos escrever:

$$H(\omega) = \frac{2}{\omega} \left(\frac{e^{i\omega T} - e^{-i\omega T}}{2i} \right) = \frac{2}{\omega} \sin(\omega T) = 2T \frac{\sin(\omega T)}{\omega T}$$

e poderemos usar a função $\text{sinc}(\cdot)$ na forma mais simples, para escrever:

$$H(\omega) = 2T \text{sinc}(\omega T)$$

4.7 Exemplo com uma função exponencial decrescente

Seja $h = h(t)$ a função definida por

$$h(t) = e^{-t} u(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases} \quad (9)$$

onde $u = u(t)$ é a função degrau unitário. Pela definição (4), temos

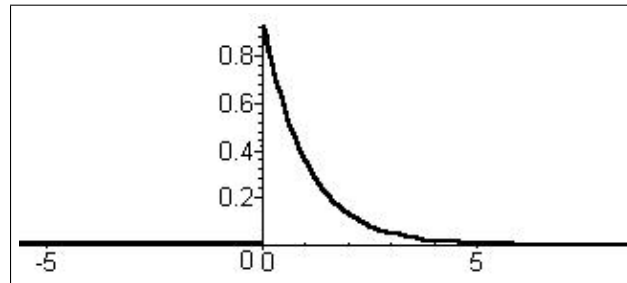


Figura 17: Gráfico de uma função exponencial decrescente

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-i\omega t} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-t(1+i\omega)} dt$$

que pode ser calculado como

$$H(\omega) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-t(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)} \right]_{t=0}^{t=M} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-M(1+i\omega)}}{1+i\omega}$$

assim

$$H(\omega) = \frac{1}{1+i\omega} = \frac{1-i\omega}{1+\omega^2}$$

Exercício: Para $A > 0$ e $\alpha > 0$, obter a transformada de Fourier de:

$$f(t) = \begin{cases} A e^{-\alpha t} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

4.8 Exemplo com uma função exponencial crescente

Seja $g = g(t)$ a função definida por

$$g(t) = e^t u(-t) = \begin{cases} e^t & \text{se } t \leq 0 \\ 0 & \text{se } t > 0 \end{cases} \quad (10)$$

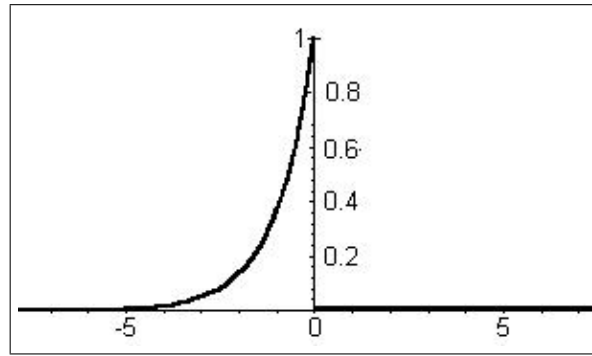


Figura 18: Gráfico de uma função exponencial crescente

onde $u = u(t)$ é a função degrau unitário.

$$\begin{aligned}
 H(\omega) &= \int_{-\infty}^0 e^t e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{t(1-i\omega)} dt \\
 &= \lim_{M \rightarrow -\infty} \int_M^0 e^{t(1-i\omega)} dt = \lim_{M \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{t(1-i\omega)}}{1-i\omega} \right]_{t=M}^{t=0} \\
 &= \frac{1}{1-i\omega} = \frac{1+i\omega}{1+\omega^2}
 \end{aligned}$$

Exercício: Se $A > 0$ e $\beta > 0$, obtenha a transformada de Fourier de:

$$g(t) = \begin{cases} A e^{\beta t} & \text{se } t \leq 0 \\ 0 & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

5 Espectros contínuos da Transformada de Fourier

5.1 Espectros, Amplitude e Fase

A transformada de Fourier de $h = h(t)$ é uma função $H = H(\omega)$ cuja imagem está no conjunto dos **números complexos**, logo ela pode ser decomposta nas suas partes real e imaginária, mas também pode ser escrita em sua forma polar. Tomaremos $H_r = H_r(\omega)$ e $H_i = H_i(\omega)$, respectivamente, como as partes real e imaginária de $H = H(\omega)$ e $j = \sqrt{-1}$ (para não confundir com o índice i). Escreveremos:

$$H = H_r + j H_i = |H| e^{j \theta(h)}$$

A amplitude da transformada de Fourier $H = H_r + j H_i$ (ou espectro de amplitude do sinal $h = h(t)$) é definida como

$$|H| = \sqrt{H_r^2 + H_i^2}$$

O ângulo de fase da transformada de Fourier $H = H_r + j H_i$ (ou espectro de fase do sinal $h = h(t)$) é definido por

$$\theta(h) = \arctan \left(\frac{H_i}{H_r} \right)$$

O espectro de potência do sinal $h = h(t)$ é definido como

$$P(\omega) = |H|^2 = H_r^2 + H_i^2$$

Não é difícil construir os gráficos das funções acima definidas.

5.2 Exemplo

Consideremos a função do Exemplo 9, definida por $h(t) = e^t u(-t)$ para $t \in R$. Já mostramos que a sua Transformada de Fourier é dada por:

$$H[\omega] = \frac{1 + j\omega}{1 + \omega^2}$$

Alguns elementos relacionados com a Transformada de Fourier deste sinal $h = h(t)$, aparecem na tabela:

$H_r = H_r(\omega)$	$= \frac{1}{1 + \omega^2}$	Parte real
$H_i = H_i(\omega)$	$= \frac{\omega}{1 + \omega^2}$	Parte imaginária
$\theta = \theta(h)$	$= \arctan(\omega)$	Ângulo de fase
$ H = H(\omega) $	$= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2}}$	Amplitude
$P(\omega)$	$= \frac{1}{1 + \omega^2}$	Espectro de potência

Figura 19: Elementos relacionados com os espectros de Fourier

6 Propriedades da Transformada de Fourier

6.1 Translação no tempo

Se $H(h) = H[h(t)]$ é a transformada de Fourier da função $h = h(t)$ e a função $h_c = h_c(t) = h(t - c)$ representa a translação da função $h = h(t)$ de c unidades para a direita, então:

$$H(h_c) = H[h(t - c)] = e^{-i\omega c} H(h) \quad (11)$$

Demonstração:

$$H(h_c) = H[h(t - c)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - c)e^{-i\omega t} dt$$

Com a mudança de variável $v = t - c$, temos

$$H(h_c) = \int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{-i\omega(c+v)} dv = e^{-i\omega c} \int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{-i\omega v} dv = e^{-i\omega c} H(h)$$

6.2 Translação na frequência

Se $H(\omega) = H[h(t)]$ é a transformada de Fourier de $h = h(t)$ então:

$$H(e^{i\omega_0 t} h(t)) = H(\omega - \omega_0) \quad (12)$$

Demonstração: Usando a definição (4), escreveremos

$$H(\omega) = H[h(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i\omega t} dt$$

Assim

$$H(e^{i\omega_0 t} h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} h(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} h(t) dt$$

Tomando $u = \omega - \omega_0$, poderemos escrever:

$$H(e^{i\omega_0 t} h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iut} h(t) dt = H(u) = H(\omega - \omega_0)$$

6.3 Homotetia (escala) na variável

Se $H(\omega) = H[h(t)]$ é a transformada de Fourier de $h = h(t)$, então:

$$H[h(at)] = \frac{1}{|a|} H\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (13)$$

Demonstração: Para esta demonstração, realizaremos a mudança de variável $u = at$, considerando primeiramente $a > 0$.

$$\begin{aligned}
 H[h(at)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(at)e^{-i\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-iu\frac{\omega}{a}} du \\
 &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-iu\frac{\omega}{a}} du \\
 &= \frac{1}{|a|} H\left(\frac{\omega}{a}\right)
 \end{aligned}$$

Consideremos agora a mesma mudança de variável $u = at$ com $a < 0$.

$$\begin{aligned}
 H[h(at)] &= \int_{-\infty}^{\infty} h(at)e^{-i\omega t} dt \\
 &= -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-iu\frac{\omega}{a}} du \\
 &= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-iu\frac{\omega}{a}} du \\
 &= \frac{1}{|a|} H\left(\frac{\omega}{a}\right)
 \end{aligned}$$

6.4 Exemplo

Seja $h = \chi_{[-1,1]}$ a função característica do intervalo simétrico $[-1, 1]$ e a sua Transformada de Fourier $H(\omega) = 2 \operatorname{sinc}(\omega)$. Usando a equação (13) e tomando $a = 2$, poderemos escrever

$$H(h(2t)) = \frac{1}{2} H\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

e esta relação nos informa que a Transformada de Fourier do sinal com o “dobro da velocidade” é igual à metade da Transformada de Fourier com a “metade da velocidade do parâmetro”.

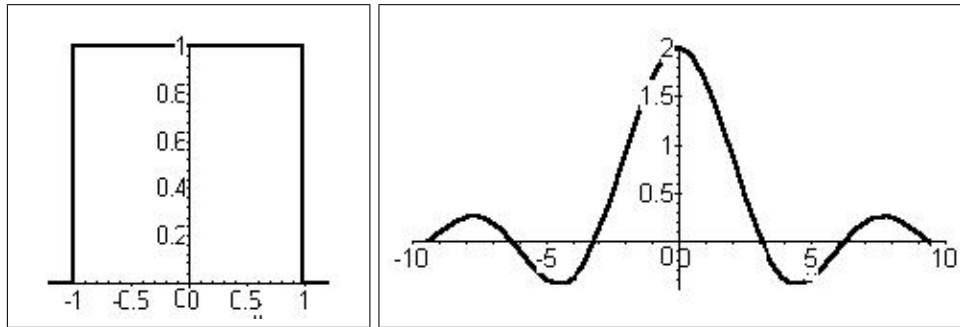


Figura 20: Domínios normais, a função e a Transformada de Fourier

O desenho acima mostra tanto a função como a sua Transformada de Fourier. O desenho abaixo mostra a “nova função” e “nova Transformada de Fourier”.

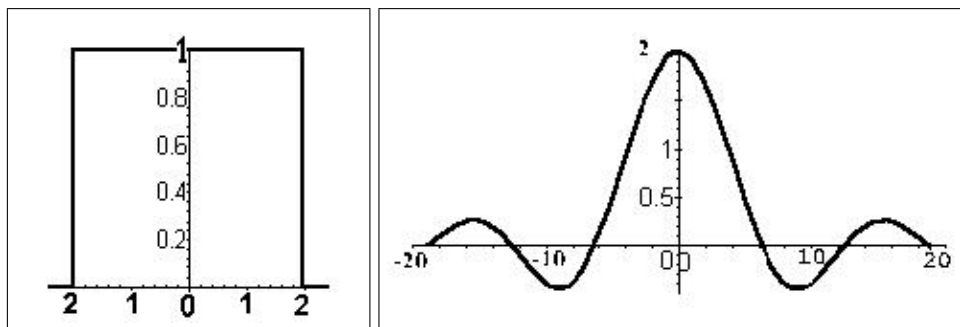


Figura 21: Domínios duplicados e Transformação com homotetia

Observamos que ao multiplicar o **argumento** da função por 2, a altura desta função permaneceu a mesma mas o domínio ficou duplicado e o mesmo ocorreu com a transformada de Fourier desta função.

7 Transformada Inversa de Fourier

A Transformada Inversa de Fourier de $g = g(\omega)$ é definida como:

$$H^{-1}(g(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Podemos obter a Transformada Inversa de Fourier da própria Transformada de Fourier de $h = h(t)$, denotada por $H = H(\omega)$, que depende da frequência ω . Se tomarmos a mudança de variável $\omega = 2\pi f$ e substituirmos a diferencial $d\omega = 2\pi df$, a função H agora ficará dependendo

da variável f e será denotada por $H = H(f)$. A definição ficará na forma:

$$h(t) = H^{-1}(H(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{2\pi i t f} df$$

Isto garante a recuperação da própria função original através da aplicação da Transformada Inversa aplicada à Transformada de Fourier, o que significa que:

$$H^{-1} \circ H = \text{Identidade}$$

Substituindo a frequência ω por ω_x , onde ω_x é a frequência que depende de $x \in R$ na definição de Transformada Inversa de Fourier, poderemos obter uma outra forma para a Transformada Inversa de Fourier de $H = H(\omega_x)$:

$$H^{-1}(H(\omega_x)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega_x) e^{2\pi i x \omega_x} d\omega_x$$

Com esta forma, podemos estender a definição ao caso bi-dimensional à função $H = H(\omega_x, \omega_y)$:

$$H^{-1}(H(\omega_x, \omega_y)) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega_x, \omega_y) e^{2\pi i(x\omega_x + y\omega_y)} d\omega_x d\omega_y$$

8 Transformadas direta e inversa de Fourier

8.1 Pares de transformadas

As Transformadas de Fourier direta e inversa são realmente inversas uma da outra, isto é:

$$H \circ H^{-1} = Id = H^{-1} \circ H$$

Na literatura encontramos notações com duas setas, uma em cada sentido, para fazer referência ao par de funções (h, H) :

$$\boxed{h \quad \rightleftharpoons \quad H}$$

Esta notação indica que H é a Transformada de Fourier de h e que h é a Transformada inversa de Fourier de H .

8.2 Propriedades Lineares

Tanto a Transformada de Fourier como a Transformada Inversa de Fourier, são transformações lineares:

$$H(a f + b g) = a H(f) + b H(g)$$

$$H^{-1}(aF_1 + bF_2) = a H^{-1}(F_1) + b H^{-1}(F_2)$$

quaisquer que sejam os escalares complexos a e b .

8.3 Exemplo

Seja $h = h(t)$ a função definida por

$$h(t) = \begin{cases} 2e^{-t} & \text{se } t \geq 0 \\ 5e^t & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

Como esta função $h = h(t)$ é combinação linear das funções f e g dos exemplos (9) e (10), isto é, $h = 2f + 5g$, temos pela linearidade que:

$$H(h) = H(2f + 5g) = H(2f) + H(5g) = 2H(f) + 5H(g)$$

ou seja

$$H(h) = 2 \frac{1 - i\omega}{1 + \omega^2} + 5 \frac{1 + i\omega}{1 + \omega^2} = \frac{7 + 3i\omega}{1 + \omega^2}$$

8.4 Exemplo complexo com um par de transformadas

8.4.1 Transformada direta

Calcularemos a Transformada de Fourier da função definida por:

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T < t < T \\ \frac{1}{2} & \text{se } t = -T \text{ ou } t = T \\ 0 & \text{se } t < -T \text{ ou } t > T \end{cases} \quad (14)$$

Pela falta de dois pequenos detalhes, esta função **quase** representa a função característica do intervalo $[-T, T]$, que é um sinal simétrico em relação ao eixo vertical, significando que h é uma função par. A Transformada de Fourier desta função é obtida apenas pela integral no intervalo $[-T, T]$ pois a função h é nula fora dele.

$$H(h(t)) = \int_{-T}^T e^{-i\omega t} dt = \int_{-T}^T e^{-i2\pi ft} dt$$

seno $\omega = 2\pi f$, f a frequência e não uma função! Assim, poderemos escrever a transformação integral como $H(f)$, em função da variável f , como:

$$H(f) = H(h(t)) = \int_{-T}^T [\cos(2\pi ft) - i \sin(2\pi ft)] dt$$

ou seja

$$H(f) = \int_{-T}^T \cos(2\pi ft) dt - i \int_{-T}^T \sin(2\pi ft) dt$$

A segunda integral é nula pois o integrando desta é uma função ímpar definida sobre um intervalo simétrico, logo restará

$$H(f) = \left[\frac{\sin(2\pi ft)}{2\pi f} \right]_{-T}^T = 2T \frac{\sin(2\pi T f)}{2\pi T f}$$

que também pode ser escrito como

$$H(f) = 2T \operatorname{sinc}(2\pi T f)$$

8.4.2 Transformada inversa

Calcularemos agora a transformada inversa de Fourier da função obtida no cálculo anterior: $H(f) = 2T \operatorname{sinc}(2\pi T f)$. Tomaremos $\omega = 2\pi f$ para escrever:

$$H^{-1}(H(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{2\pi i f t} df$$

Substituindo a função $H = H(f)$ na integral, teremos:

$$H^{-1}(H(f)) = \int_{-\infty}^{\infty} 2T \frac{\sin(2\pi f T)}{2\pi f T} e^{2\pi i f t} df$$

e simplificando, obteremos

$$H^{-1}(H(f)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f T)}{f} e^{2\pi i f t} df$$

Pela relação de Euler, podemos escrever

$$\begin{aligned} H^{-1}(H(f)) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f T)}{f} \cos(2\pi f t) df \\ &+ i \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f T)}{f} \sin(2\pi f t) df \end{aligned}$$

A segunda integral é nula pois o integrando é uma função ímpar na variável f . Como $\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$, então

$$\sin(2\pi f T) \cos(2\pi f t) = \frac{1}{2} [\sin(2\pi f(T+t)) + \sin(2\pi f(T-t))]$$

assim

$$\begin{aligned} H^{-1}(H(f)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f(T+t)) + \sin(2\pi f(T-t))}{f} df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f(T+t))}{2\pi f} df + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f(T-t))}{2\pi f} df \end{aligned}$$

Multiplicando e dividindo a primeira integral por $T+t$, e repetindo esta operação na segunda integral com $T-t$, virá:

$$\begin{aligned} H^{-1}(H(f)) &= (T+t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f(T+t))}{2\pi f(T+t)} df \\ &= +(T-t) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi f(T-t))}{2\pi f(T-t)} df \end{aligned}$$

Utilizando o fato (do Cálculo Integral) que para $a \neq 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi ax)}{2\pi ax} dx = \frac{1}{2|a|}$$

obtemos:

$$H^{-1}(H(f)) = \frac{T+t}{2|T+t|} + \frac{T-t}{2|T-t|} = \frac{1}{2} [\text{sinal}(T+t) + \text{sinal}(T-t)]$$

Analisaremos os valores de $t \in R$ no intervalo $[-T, T]$ e fora dele.

(a) Se $t < -T$, $\text{sinal}(T+t) = -1$ e $\text{sinal}(T-t) = 1$, então:

$$H^{-1}(H(f)) = \frac{1}{2}[-1 + 1] = 0$$

(b) Se $t > T$, $\text{sinal}(T+t) = 1$ e $\text{sinal}(T-t) = -1$, então:

$$H^{-1}(H(f)) = \frac{1}{2}[1 - 1] = 0$$

(c) Se $-T < t < T$, $\text{sinal}(T+t) = 1$ e $\text{sinal}(T-t) = 1$, então:

$$H^{-1}(H(f)) = \frac{1}{2}[1 + 1] = 1$$

(d) Se $t = T$ e $t = -T$ um dos sinais é nulo e a função vale $1/2$.

Desse modo

$$H^{-1}(H(f)) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T < t < T \\ \frac{1}{2} & \text{se } t = -T \text{ ou } t = T \\ 0 & \text{se } t < -T \text{ ou } t > T \end{cases}$$

8.4.3 Conclusão

Todo este esforço matemático foi feito para recuperar a função original que tínhamos. Temos então o par de transformadas:

$$H(f) = 2T \operatorname{sinc}(2\pi fT) \quad \Leftrightarrow \quad h(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } -T < t < T \\ \frac{1}{2} & \text{se } t = -T \text{ ou } t = T \\ 0 & \text{se } t < -T \text{ ou } t > T \end{cases}$$

Exercício: Construir o gráfico da função $h=h(t)$ e também da transformada $H=H(f)$ obtida em função da frequência f .

9 Convolução de Funções

9.1 Produto de transformadas e a convolução

O produto das transformadas de Fourier de duas funções não é igual à transformada de Fourier do produto dessas funções, isto é:

$$H(f \cdot g) \neq H(f) H(g)$$

mas a igualdade valerá após trocarmos o \cdot pelo $*$, significando a convolução das funções f e g , que será definida na sequência.

9.2 Definição de convolução

Consideremos as funções f e g cujo produto $h(x) = f(x)g(x)$ é uma função absolutamente integrável. A convolução entre f e g , denotada por $f * g$, é definida por qualquer uma das integrais:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \omega)g(\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)g(x - \omega)d\omega$$

Em alguns textos, o termo convolução aparece como produto de convolução.

9.3 Propriedades da convolução

Embora algumas das propriedades abaixo não possam ser demonstradas facilmente, quando tem sentido a convolução para certas funções, tem-se:

(1) Comutatividade: $f * g = g * f$

- (2) Associatividade: $f * (g * h) = (f * g) * h$
- (3) Distributividade: $f * (g + h) = f * g + f * h$
- (4) Elemento nulo: $f * 0 = 0$
- (5) Elemento identidade: Existe um objeto matemático que recebe o nome de distribuição (não é uma função!) e que faz o papel da identidade para este “produto” de convolução, isto é, $\delta * f = f$

9.4 Alguns exercícios importantes

1. Obter a convolução das funções definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1] \\ 0 & x \notin [-1, 1] \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x \in [6, 8] \\ 0 & x \notin [6, 8] \end{cases}$$

2. Mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega = \sqrt{\pi}$$

Sugestão: Usar integrais duplas impróprias e mudanças de variáveis com coordenadas polares para o cálculo.

3. Usar a integral do item anterior, para mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \omega)e^{-\omega^2} d\omega = x\sqrt{\pi}$$

4. Mostre que a convolução entre funções $f(x) = x$ e $g(x) = e^{-x^2}$ para $x \in \mathbb{R}$ é dada por:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \omega)e^{-\omega^2} d\omega = x\sqrt{\pi}$$

10 A distribuição delta de Dirac

10.1 Elementos gerais sobre δ

A distribuição delta de Dirac é um objeto matemático definido para fazer o papel da identidade para a operação de convolução de funções. A distribuição δ torna mais fácil a unificação do tratamento do estudo de Séries de Fourier e Transformadas de Fourier. Fisicamente, ela pode ser interpretada como um impulso de energia em um sistema, razão pela qual recebe o nome de Função Impulso de Dirac.

10.2 Função degrau unitário e função característica

Já definimos a função degrau unitário de Heaviside, como

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

A translação desta função de c unidades para a direita é definida por

$$u_c(x) = u(x - c) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq c \\ 0 & \text{se } x < c \end{cases}$$

Definimos a função característica de um conjunto real I como

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in I \\ 0 & \text{se } x \notin I \end{cases}$$

A função característica de um intervalo real $I = [a, b]$ pode ser escrita em função de duas translações da função degrau unitário como:

$$\chi_{[a,b]}(x) = u(x - a) - u(x - b)$$

10.3 A distribuição δ como limite de funções reais

Uma das formas usadas para construir a distribuição delta de Dirac é tomar uma sequência de **funções características** pares (núcleos de Dirac) que dependem de um parâmetro $r > 0$, sendo que a área da região localizada sob o gráfico de cada função característica no semi-plano superior deve ser sempre igual a 1, ou seja, tomar:

$$\varphi_r(x) = \frac{1}{2r} \chi_{[-r,r]}(x) = \frac{1}{2r} [u(x + r) - u(x - r)]$$

e tomar o limite quando $r \rightarrow 0$, isto é:

$$\delta(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \varphi_r(x)$$

Exercício importante: Construir os gráficos de algumas dessas funções, como por exemplo, $\varphi_1, \varphi_{1/2}, \varphi_{1/4}, \varphi_{1/8}, \dots$, para observar que, à medida que os valores de r diminuem se aproximando de 0, as alturas das funções φ_r aumentam tendendo a ∞ .

A partir dos gráficos obtidos no exercício, é possível observar que a distribuição $\delta = \delta(x)$ pode ser pensada como uma “função” quase sempre nula, com um impulso infinito na origem do sistema, isto é:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

A translação de c unidades para a direita da distribuição δ é definida como

$$\delta_c(x) = \delta(x - c) = \begin{cases} \infty & \text{se } x = c \\ 0 & \text{se } x \neq c \end{cases}$$

A distribuição delta de Dirac, denotada por $\delta = \delta(x)$, é definida como um objeto matemático, com as seguintes características especiais:

1. $\delta(x) = 0$ se $x \neq 0$
2. $\delta(x) = \delta(-x)$ para todo $x \in R$
3. $\delta(0) = \infty$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$

10.4 Mais rigor matemático com a distribuição δ

Rigorosamente falando, δ **não é uma função**, pois assume o valor ∞ no ponto $x = 0$ e a integral (ítem 4) apresentada acima, deveria ser nula. Quando utilizada em uma convolução, a distribuição δ se comporta como uma função. Em geral, aparece definida em livros, através da propriedade:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx$$

mas esta integral também não faz sentido pois δ não é uma função. Na verdade, devem ser usados os núcleos de Dirac para dar consistência a esta definição e podermos escrever:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \lim_{r \rightarrow 0} \varphi_r(x) dx$$

10.5 Propriedades da distribuição δ de Dirac

1. Se $f = f(x)$ é uma função contínua, então

$$(f * \delta)(x) = f(x)$$

Demonstração: Seja $f = f(x)$ uma função contínua. Pela definição de convolução, temos que

$$(f * \delta)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - v) \delta(v) dv$$

Se a distribuição $\delta = \delta(v)$ é definida por $\delta(v) = \lim_{r \rightarrow 0} \varphi_r(v)$, escrevemos

$$\begin{aligned} (f * \delta)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-v) \lim_{r \rightarrow 0} \varphi_r(v) dv \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-v) \varphi_r(v) dv \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-v) \frac{1}{2r} [u(x+r) - u(x-r)] dv \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{-r}^r f(x-v) dv \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} f(\omega) d\omega \end{aligned}$$

sendo que a última integral acima foi obtida através da mudança de variável $x-v = \omega$. Pelo teorema da média para integrais, existe um ponto $c \in (x-r, x+r)$ tal que

$$(f * \delta)(x) = \lim_{r \rightarrow 0} f(c) = f(x)$$

sendo que a última igualdade acima foi garantida pelo fato que quando $r \rightarrow 0$, o intervalo $(x-r, x+r)$ se “comprime” no conjunto unitário $\{x\}$.

2. Se $f = f(x)$ é uma função contínua em $x = 0$, então

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)$$

Demonstração: Pelo item anterior, garantimos que

$$f(x) = (f * \delta)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-v)\delta(v)dv$$

assim, em particular, quando $x = 0$, temos

$$f(0) = (f * \delta)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(-v)\delta(v)dv$$

Com a mudança de variáveis $v = -x$, podemos escrever

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx$$

uma vez que $\delta(-x) = \delta(x)$.

3. Se $f = f(x)$ é uma função contínua em $x = c$, então

$$(f * \delta_c)(x) = f(c)$$

Esta última propriedade tem uma importante consequência do ponto de vista da Computação Gráfica.

10.6 Propriedade gráfica de δ com a convolução

Às vezes, a distribuição δ é denotada por δ_0 para indicar que ela representa um “impulso” no ponto $x = 0$. Quando desejamos indicar um “impulso” em um ponto genérico $x = c$, usamos a notação δ_c que representa, por definição:

$$\delta_c(x) = \delta_0(x - c) = \delta(x - c)$$

A convolução de funções e a distribuição δ_c realizam um papel fundamental em Computação Gráfica. Se um objeto gráfico está definido por um sinal $f = f(x)$, podemos obter uma cópia de $f = f(x)$ em uma posição $x = c$ realizando a convolução da distribuição δ_c com $f = f(x)$ para obter $f(x - c)$, que é a imagem de f transladada de c unidades para a direita. Existe um análogo no plano: Se um objeto gráfico plano está definido por um sinal $f = f(x, y)$, podemos obter uma cópia de $f = f(x, y)$ em uma posição (c, d) realizando a convolução da distribuição $\delta_{(c,d)}$ com $f = f(x, y)$ para obter $f(x - c, y - d)$, que é a imagem de f transladada de (c, d) no plano cartesiano.

11 Transformada de Fourier da convolução

Se faz sentido obter a convolução das funções f e g , então:

$$H(f) \cdot H(g) = H(f * g)$$

Aplicando a Transformada Inversa de Fourier a esta relação, obtemos:

$$H^{-1}\{H(f) \cdot H(g)\} = H^{-1}(H(f * g)) = f * g$$

11.1 Transformada de Fourier da distribuição δ

Como vimos, a última propriedade da distribuição δ nos mostra que $f * \delta = f$ para toda função f para a qual tem sentido a convolução,

logo pelo Teorema da convolução:

$$H(f)H(\delta) = H(f * \delta) = H(f)$$

e podemos escrever que

$$H(\delta) = 1$$

Tem sentido então escrever o par de transformadas

$$\boxed{\delta \quad \rightleftharpoons \quad 1}$$

12 Transformadas de Fourier de Derivadas

12.1 Transformadas de derivadas parciais

Para apresentar algumas propriedades das transformadas de Fourier para algumas derivadas parciais, necessitaremos exigir algumas características das funções $u = u(x, t)$, como por exemplo:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 0$$

Estas exigências são análogas a exigirmos que a função $u = u(x, t)$ pertença ao espaço de Schwarz no plano cartesiano.

Se as derivadas são realizadas em relação à variável x , escreveremos

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = H(u_x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t)e^{-i\omega x} dx = i\omega H(u)$$

Pela definição da Transformada de Fourier de u_x , temos:

$$H(u_x) = \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, t)e^{-i\omega x} dx$$

Usando a integração por partes na integral imprópria

$$\int_{-\infty}^{\infty} m(x) dn(x) = [m(x)n(x)]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} n(x) dm(x)$$

com $m(x) = e^{-i\omega x}$, $dm(x) = -i\omega e^{-i\omega x} dx$, $n(x) = u_x(x, t)$ e $dn(x) = u(x, t)dx$, teremos:

$$H(u_x) = \lim_{M \rightarrow \infty} u(M, t)e^{-i\omega M} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{N \rightarrow -\infty} u(N, t)e^{-i\omega N} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t)(-i\omega)e^{-i\omega x} dx$$

Assim

$$H(u_x) = - \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) (-i\omega) e^{-i\omega x} dx$$

o que garante que

$$H(u_x) = i\omega H(u)$$

Pela dupla aplicação do processo anterior temos:

$$H(u_{xx}) = -\omega^2 H(u)$$

Se as derivadas são realizadas em relação à variável t , podemos obter as transformadas de Fourier de algumas derivadas de funções, como:

$$H(u_t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial t} H(u)$$

Realmente:

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial}{\partial t} H(u)$$

Analogamente, temos que:

$$H\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{tt}(x, t) e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2} H(u)$$

13 Solução da Equação do Calor

A Transformada de Fourier pode ser aplicada na obtenção da solução de um Problema com Valores Iniciais (PVI) com uma Equação Diferencial Parcial do Calor, como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (x \in R, t > 0)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (x \in R)$$

Tomemos as Transformadas de Fourier em relação à variável x em ambos os membros da Equação Diferencial Parcial e também na Condição Inicial, para obter funções apenas da variável t . Assim teremos:

$$H(u_t) = KH(u_{xx}), \quad \frac{\partial}{\partial t} H(u) = -K\omega^2 H(u)$$

Para simplificar, tomaremos a Transformada de Fourier de $u = u(x, t)$ com a letra maiúscula $U(t) = H(u)$ e $U(0) = H(f)$. Como tomamos a

função $U = U(t)$ apenas, não há necessidade de usar a derivada parcial. Assim, temos o PVI:

$$\frac{d}{dt} U(t) = K - \omega^2 U(t), \quad U(0) = H(f)$$

Este é um PVI para uma Equação Diferencial Ordinária Linear e homogênea de 1a. ordem, cuja solução é dada por:

$$U(t) = U(0) e^{-a^2 \omega^2 t}$$

significando que:

$$H(u) = H(f) e^{-a^2 \omega^2 t}$$

Se conhecermos uma função $g=g(x)$ cuja Transformada de Fourier seja dada por $H(g) = e^{-a^2 \omega^2 t}$ poderemos escrever

$$H(u) = H(f) \cdot H(g)$$

e usar a convolução para garantir que:

$$H(u) = H(f) \cdot H(g) = H(f * g)$$

Aplicando a Transformada Inversa de Fourier, teremos:

$$u(x, t) = f * g$$

onde $u = u(x, t)$ será a solução do PVI dado, desde que tenhamos resolvido o problema de obter $g = g(x, t)$, mas a propriedade desejada é satisfeita pela função “gaussiana”:

$$g(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

e o par de transformadas é dado por:

$$\boxed{H[\omega] = e^{-a^2 \omega^2 t} \quad \Leftrightarrow \quad g(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

É um fato notável que, tanto a função original como a sua Transformada de Fourier são funções “gaussianas” (da mesma forma), para uma escolha apropriada de t .

A solução do PVI é então dada pela convolução:

$$u(x, t) = (f * g)(x) = \left(\frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} \right) * f(x)$$

ou seja

$$u(x, t) = (g * f)(x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\omega)^2}{4a^2t}} f(\omega) d\omega$$

13.1 Observação sobre este material

Este material não é simples para um aluno de níveis iniciais, mas é básico para os interessados em estudar mais profundamente a Análise de Fourier. Neste caso, você deverá estar preparado do ponto de vista matemático pois os temas envolvidos com a Análise Harmônica são aplicados em praticamente todos os campos científicos ligados a esta área tecnológica como Processamento digital de sinais e especialmente a Computação Gráfica.

Referências bibliográficas

- [1] Close, Charles M., Circuitos Lineares, Vol.2, LTC/EDUSP, (1975), Rio de Janeiro, Brasil.
- [2] Farlow, Stanley J., Partial Differential Equations for Scientists and Engineers, Dover Publications Inc., (1993), New York, USA.
- [3] Figueiredo, Djairo Guedes, Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais, Coleção Euclides, IMPA/CNPq, (1986), Rio de Janeiro, Brasil.
- [4] Gärding, Lars, Encontro com a Matemática, Editora Universidade de Brasília, (1977), Brasília, Brasil.
- [5] Hounie, Jorge, Teoria Elementar das Distribuições, 12o. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA/CNPq, (1979), Rio de Janeiro, Brasil.
- [6] Kaplan, Wilfred, Cálculo Avançado, vol.1 e 2, Edgard Blücher Editora e EDUSP, (1972), São Paulo, Brasil.

-
- [7] Katznelson, Yitzhak, *An Introduction to Harmonic Analysis*, Dover Publications, INC., (1968), New York, USA.
- [8] Kolmogorov, A.N. e Fomin, S.V., *Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional*, Editorial MIR, (1972), Moscou.
- [9] Moretin, Pedro A., *Análise Harmônica de Processos Estocásticos*, 12o. Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA/CNPq, (1979), Rio de Janeiro, Brasil.
- [10] Quevedo, Carlos P., *Circuitos Elétricos*, LTC Editora, (1988), Rio de Janeiro, Brasil.
- [11] Spiegel, Murray, *Análise de Fourier*, Coleção Schaum, McGraw-Hill do Brasil, (1976), São Paulo, Brasil.