

# Exponencial de uma matriz

Ulysses Sodré

Londrina-PR, 21 de Agosto de 2001; Arquivo: expA.tex

## Conteúdo

1	Introdução à exponencial de uma matriz	2
2	Polinômio característico, autovalores e autovetores	2
3	Teorema de Cayley-Hamilton	3
4	Potências de uma matriz quadrada	3
5	Teoria misturada com um exemplo numérico	4
6	$\exp(tA)$ onde $A$ tem autovalores distintos	5
7	$\exp(tA)$ onde $A$ tem autovalores repetidos	5
8	Matriz (ordem 3) com autovalores distintos	6
9	Matriz com um autovalor duplo e um simples	6
10	Matriz com o autovalor triplo	7
11	Propriedades da exponencial de uma matriz	7
12	A equação diferencial $X' = AX$ ( $\text{ordem}(A)=2$ )	8
13	A equação diferencial $X' = AX$ ( $\text{ordem}(A)=n$ )	8
14	A equação linear não homogênea $X' = AX + f(t)$	9

# 1 Introdução à exponencial de uma matriz

A exponencial de uma matriz real  $tA$  de ordem  $n$ , pode ser obtida por vários modos distintos. Como exemplo, vamos apresentar três formas:

- (1) Uma série infinita de potências de  $A$  da forma:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$$

- (2) Pelo método dos autovalores:

$$e^{tA} = P e^D P^{-1}$$

onde  $D = D(t\lambda_1, t\lambda_2, \dots, t\lambda_n)$  é a matriz possui em sua diagonal os autovalores  $t\lambda_1, t\lambda_2, \dots, t\lambda_n$  da matriz  $tA$ .

- (3) Pelo Teorema de Cayley-Hamilton:

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k A^k$$

sendo os escalares  $\alpha_k$  obtidos tal que para cada autovalor  $\lambda$ :

$$e^{t\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (t\lambda)^k$$

Em Equações Diferenciais Ordinárias, é preferível utilizar o Teorema de Cayley-Hamilton que simplifica as operações. Para este estudo, trabalharemos somente com matrizes quadradas  $A$  de ordem  $n$  que possuem autovalores reais. Na sequência, apresentaremos alguns preliminares.

## 2 Polinômio característico, autovalores e autovetores

O polinômio característico de uma matriz quadrada  $M$  de ordem  $n$  é o polinômio mônico<sup>1</sup>, definido por:

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I)$$

A equação característica da matriz  $M$  é dada por

$$p(\lambda) = \det(M - \lambda I) = 0$$

Cada escalar  $\lambda$  que anula o polinômio característico recebe o nome de autovalor<sup>2</sup> da matriz  $M$ . Se  $v$  é um vetor *não nulo* e  $\lambda$  é um autovalor de  $M$ , para o qual

$$Mv = \lambda v$$

então  $v$  é denominado um autovetor<sup>3</sup> de  $M$  associado ao autovalor  $\lambda$ , sendo que  $\lambda$  poderá eventualmente ser igual a zero.

Um autovalor  $\lambda$  realiza a mesma função que a matriz  $M$  quando esta atua sobre o autovetor correspondente  $v_\lambda$ , mas  $M$  tem  $n \times n$  elementos, enquanto que  $\lambda$  é apenas um escalar.

Um mesmo autovalor  $\lambda$  poderá estar associado a vários autovetores. O subespaço  $M_\lambda$  gerado pelos autovetores associados a  $\lambda$  recebe o nome de autoespaço associado ao autovalor  $\lambda$ .

<sup>1</sup>Polinômio mônico é aquele cujo coeficiente do termo dominante é igual a 1.

<sup>2</sup>“eigenvalue”, raiz característica, valor característico, valor próprio

<sup>3</sup>“eigenvector”, vetor característico, vetor próprio

### 3 Teorema de Cayley-Hamilton

Toda matriz quadrada  $M$  é um **zero** do seu polinômio característico.

Um esquema simples para este Teorema é:

$$M \rightarrow p = p(\lambda) \rightarrow p(M) = 0$$

Este teorema garante que se  $M$  é uma matriz de ordem  $n$  e se o seu polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = \sum_{k=0}^n b_k \lambda^k$$

com  $b_n = 1$ , então substituindo  $\lambda$  por  $M$ , teremos um polinômio de matrizes identicamente nulo, isto é:

$$p(M) = \sum_{k=0}^n b_k M^k = 0$$

onde  $M^0 = I$  e  $M^{k+1} = M \cdot M^k$  para cada  $k \in N$ .

Como exemplo, se

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

então

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8$$

e substituindo  $\lambda$  por  $M$ , teremos

$$p(M) = M^2 - 2M - 8I = 0$$

e esta última relação garante que é possível expressar a potência  $M^2$  como combinação linear de  $I$  e de  $M$ , isto é:

$$M^2 = 2M + 8I$$

Uma consequência imediata do Teorema de Cayley-Hamilton, é que a potência  $M^n$  de uma matriz quadrada  $M$  de ordem  $n$ , sempre poderá ser escrita como a combinação linear das potências de  $M$  com expoentes menores do que  $n$ , isto é:

$$M^n = - \sum_{k=0}^{n-1} b_k M^k$$

### 4 Potências de uma matriz quadrada

Já definimos  $M^0 = I$  e para cada  $k \in N$ :

$$M^{k+1} = M \cdot M^k$$

Consideremos a matriz  $M$  de ordem  $n = 2$  é definida por:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico desta matriz é

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 8 = (\lambda - 4)(\lambda + 2)$$

e os autovalores de  $M$  são:

$$\lambda_1 = 4 \quad \lambda_2 = -2$$

Usando o Teorema de Cayley-Hamilton, podemos substituir o parâmetro  $\lambda$  por  $M$

no polinômio característico para obter um polinômio matricial identicamente nulo, isto é:

$$p(M) = M^2 - 2M - 8I = 0$$

Assim, escrevemos  $M^2$  como uma combinação linear de  $I$  e  $M$ :

$$M^2 = 2M + 8I$$

A partir desta relação, podemos obter todas as potências sucessivas de  $M$  como combinações lineares das matrizes  $I$  e  $M$ .

Por exemplo:

$$M^3 = M \cdot M^2 = M(2M + 8I)$$

$$M^3 = 2M^2 + 8M = 12M + 16I$$

$$M^4 = M.M^3 = M(12M + 16I)^2$$

$$M^4 = 12M^2 + 16M = 40M + 96I$$

Este fato garante que todas as potências da matriz  $M$  com expoente  $n$  inteiro não negativo, podem ser escritas como combinações lineares das matrizes  $I$  e  $M$ .

## 5 Teoria misturada com um exemplo numérico

A exponencial da matriz quadrada  $M$  pode ser definida como:

$$\exp(M) = e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k$$

Para cada matriz quadrada  $M$  de números reais, esta série de potências de matrizes converge absolutamente para  $\exp(M)$ .

Para obter a exponencial de uma matriz  $M$ , introduziremos o processo misturando aspectos teóricos com um exemplo numérico, que julgo ser a melhor forma para aprender. Para a matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$$

a exponencial pode ser escrita como uma combinação linear das matrizes  $I$  e  $M$ , o que garante a existência de escalares  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  tal que:

$$e^M = \alpha_0 I + \alpha_1 M$$

Obteremos os escalares  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  trabalhando com as propriedades dos autovalores da matriz  $M$  para obter os autovalores da matriz  $e^M$ , sem a necessidade de operar com os autovetores da matriz  $M$ .

Se  $\lambda$  é um autovalor para a matriz  $M$ , então que  $\lambda^n$  é um autovalor para a matriz  $M^n$  e como consequência é possível mostrar que  $e^\lambda$  é um autovalor para a matriz  $e^M$ ,

o que garante que existem vetores<sup>4</sup>  $v_k$  não nulos tal que:

$$e^M v_k = e^{\lambda_k} v_k$$

onde  $\lambda_k$  são autovalores para a matriz  $M$ .

Por outro lado:

$$(\alpha_0 I + \alpha_1 M) v_k = (\alpha_0 + \alpha_1 \lambda) v_k$$

Reunindo as duas últimas expressões e levando em consideração que os autovetores  $v_k$  são não nulos, podemos garantir que para  $k = 1, 2$ , valem as relações:

$$e^{\lambda_k} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_k$$

e temos um sistema com duas equações em  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$ :

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1} &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_1 \\ e^{\lambda_2} &= \alpha_0 + \alpha_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

Para o caso particular da matriz  $M$  tomada como exemplo, os autovalores são  $\lambda_1 = 4$  e  $\lambda_2 = -2$  e o sistema terá a forma:

$$\begin{aligned} e^4 &= \alpha_0 + 4 \alpha_1 \\ e^{-2} &= \alpha_0 - 2 \alpha_1 \end{aligned}$$

cuja solução é:

$$\alpha_0 = \frac{1}{3}(e^4 + 2e^{-2}) \quad \text{e} \quad \alpha_1 = \frac{1}{6}(e^4 - e^{-2})$$

Como

$$e^M = \alpha_0 I + \alpha_1 M$$

<sup>4</sup>Na verdade, estes vetores são os autovetores da matriz.

então

$$e^M = \frac{1}{3}(e^4 + 2e^{-2})I + \frac{1}{6}(e^4 - e^{-2})M$$

ou seja

$$e^M = \begin{pmatrix} \frac{e^4+2e^{-2}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{e^4+2e^{-2}}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{e^4-2e^{-2}}{6} & \frac{e^4-2e^{-2}}{6} \\ \frac{9e^4-18e^{-2}}{6} & \frac{e^4-2e^{-2}}{6} \end{pmatrix}$$

assim

$$e^M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3e^4 + 2e^{-2} & e^4 - 2e^{-2} \\ 9e^4 - 18e^{-2} & 3e^4 + 2e^{-2} \end{pmatrix}$$

Todos estes cálculos foram realizados sem a necessidade de obter os autovetores de  $M$ , bem como a matriz de transição.

## 6 $\exp(tA)$ onde $A$ tem autovalores distintos

Determinaremos agora a  $\exp(tA)$ , onde  $A$  é definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

O parâmetro  $t$  não deverá interferir nas operações e iniciaremos obtendo o polinômio característico de  $A$ , dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 8 = (\lambda - 2)(\lambda + 4)$$

Os autovalores de  $A$  são:

$$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = -4$$

assim os autovalores de  $tA$  são:

$$\lambda_1 = 2t \quad \lambda_2 = -4t$$

Com o mesmo raciocínio usado anteriormente, trocamos  $M$  por  $tA$  para escrever:

$$e^{tA} = \alpha_0 I + \alpha_1 (tA)$$

e isto significa que:

$$\begin{aligned} e^{2t} &= \alpha_0 + \alpha_1 (2t) \\ e^{-4t} &= \alpha_0 + \alpha_1 (-4t) \end{aligned}$$

Ao resolver este sistema obtemos:

$$\alpha_0 = \frac{1}{3}(2e^{2t} + e^{-4t}) \quad \text{e} \quad \alpha_1 = \frac{1}{6t}(e^{2t} - e^{-4t})$$

Substituindo  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$  pelos seus valores funcionais<sup>5</sup> obtemos:

$$e^{tA} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 3e^{-4t} \end{pmatrix}$$

## 7 $\exp(tA)$ onde $A$ tem autovalores repetidos

Iremos determinar  $\exp(tA)$  onde a matriz  $A$  é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de  $A$  é:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2$$

O autovalor duplo de  $A$  é  $\lambda = 3$  e o autovalor duplo de  $tA$  é  $\lambda = 3t$ . Seguindo o mesmo raciocínio que antes, temos:

$$e^{tA} = \alpha_0 I + \alpha_1 (tA)$$

o que significa que:

$$e^{\lambda} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda$$

<sup>5</sup>Funcionais porque dependem do parâmetro  $t$

Desse modo:

$$e^{3t} = \alpha_0 + \alpha_1 (3t)$$

Como o autovalor é duplo, não temos uma segunda equação. Derivamos então em relação ao parâmetro  $t$ , ambos os membros desta equação, para obter:

$$\alpha_1 = e^{3t}$$

e a partir do valor de  $\alpha_1$ , obtemos:

$$\alpha_0 = e^{3t}(1 - 3t)$$

Com os valores funcionais de  $\alpha_0$  e  $\alpha_1$ , obtemos a  $\exp(tA)$ .

## 8 Matriz (ordem 3) com autovalores distintos

Determinaremos a  $\exp(tA)$ , onde a matriz  $A$  é:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de  $A$  é:

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(\lambda - 4)$$

Os autovalores de  $A$  são:  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 3$  e  $\lambda_3 = 4$  e os autovalores de  $tA$  são:  $\lambda_1 = 2t$ ,

$\lambda_2 = 3t$  e  $\lambda_3 = 4t$ .

Assim

$$e^{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 (2t) + \alpha_2 (2t)^2$$

$$e^{3t} = \alpha_0 + \alpha_1 (3t) + \alpha_2 (3t)^2$$

$$e^{4t} = \alpha_0 + \alpha_1 (4t) + \alpha_2 (4t)^2$$

Resolvendo este sistema em relação às variáveis  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ <sup>6</sup>, podemos obter a matriz  $e^{tA}$  através de

$$e^{tA} = \alpha_0 I + \alpha_1 (tA) + \alpha_2 (tA)^2$$

## 9 Matriz com um autovalor duplo e um simples

Determinaremos agora a  $\exp(tA)$ , onde a matriz  $A$  é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de  $A$  é:

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

Os autovalores de  $A$  são:  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = 4$  e os autovalores de  $tA$  são:  $\lambda_1 = 2t$ ,  $\lambda_2 = 2t$  e  $\lambda_3 = 4t$ .

Isto significa que temos apenas duas equações:

$$e^{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 (2t) + \alpha_2 (2t)^2$$

$$e^{4t} = \alpha_0 + \alpha_1 (4t) + \alpha_2 (4t)^2$$

Devemos acrescentar uma terceira equação

$$2e^{2t} = 2\alpha_1 + 8\alpha_2 t$$

obtida pela derivada de relação à variável  $t$  da equação:

$$e^{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 (2t) + \alpha_2 (2t)^2$$

A escolha desta equação não é aleatória pois ela é a equação onde aparece o autovalor repetido.

Resolvendo este sistema obtemos  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  e substituindo estes valores em

$$e^{tA} = \alpha_0 I + \alpha_1 tA + \alpha_2 t^2 A^2$$

obtemos a matriz  $e^{tA}$ .

<sup>6</sup>Na verdade, não é tão vantajoso obter os escalares  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  mas sim obter tais escalares multiplicados pelas potências sucessivas de  $t$ :  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1 t$  e  $\alpha_2 t^2$ .

## 10 Matriz com o autovalor triplo

Determinaremos agora a  $\exp(tA)$ , onde a matriz  $A$  é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico de  $A$  é:

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

e o autovalor triplo de  $A$  é  $\lambda = 2$  e o autovalor triplo de  $tA$  é  $\lambda = 2t$ .

Assim:

$$e^{tA} = \alpha_0 I + \alpha_1 (tA) + \alpha_2 (tA)^2$$

e podemos obter apenas uma equação:

$$e^{2t} = \alpha_0 + \alpha_1 (2t) + \alpha_2 (2t)^2$$

Derivando esta equação em relação à variável  $t$  e simplificando a equação obtida, obteremos:

$$e^{2t} = \alpha_1 + 4\alpha_2 t$$

Derivando agora esta última equação em relação à variável  $t$  e simplificando a equação obtida, obteremos:

$$e^{2t} = 2\alpha_2$$

Resolvendo este sistema obtemos  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  e podemos obter a matriz  $e^{tA}$  substituindo estes valores funcionais em

$$e^{tA} = \alpha_0 I + \alpha_1 tA + \alpha_2 t^2 A^2$$

**Exercício:** Se  $A = (a_{ij})$  é uma matriz de ordem 2 definida por  $a_{12} = 1$  e  $a_{ij} = 0$  nas outras posições, sendo  $B$  a transposta de  $A$ , mostrar que

1.  $AB \neq BA$

2.  $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

**Exercício:** Assumindo que  $AB = BA$ , mostrar que

1.  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

2.  $(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

## 11 Propriedades da exponencial de uma matriz

(1) Se  $Z$  é uma matriz quadrada **nula**, então

$$e^Z = I$$

(2) Para toda matriz quadrada  $A$  e para todo  $t \in R$ :

$$A e^{tA} = e^{tA} A$$

(3) Se  $A$  e  $B$  comutam, então

$$e^{tA} e^{tB} = e^{t(A+B)}$$

(4) Se  $A$  e  $B$  **não comutam**, então em geral

$$e^{tA} e^{tB} \neq e^{t(A+B)}$$

(5) Quaisquer que sejam  $t \in R$ ,  $s \in R$ :

$$e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}$$

(6) Para cada  $t \in R$ , existe a inversa da matriz  $\exp(tA)$  dada por:

$$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$$

- (7) O conjunto  $M = \{e^{tA} : t \in R\}$  de todas as matrizes da forma  $\exp(tA)$  onde  $t \in R$ , munido com a operação de multiplicação de matrizes determina uma estrutura de grupo abeliano, isto é:
- (a)  $(M, \cdot)$  é associativa;
  - (b)  $(M, \cdot)$  possui elemento neutro;
  - (c) Cada elemento de  $M$  tem inverso no próprio conjunto  $M$ ;
  - (d)  $(M, \cdot)$  é comutativa.

## 12 A equação diferencial $X' = AX$ (ordem( $A$ )=2)

Seja a equação diferencial vetorial  $X' = AX$ , onde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

é uma função diferenciável em relação ao parâmetro  $t$ . A solução geral de  $X' = AX$ , é da forma:

$$X(t) = C \exp(tA)$$

onde  $C = (C_1, C_2)$  é uma matriz contendo duas constantes.

Como exemplo, consideremos o sistema de equações

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= 8x_1(t) - 2x_2(t) \end{aligned}$$

que pode ser escrito na forma

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = AX(t)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

Já vimos que

$$e^{tA} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 3e^{-4t} \end{pmatrix}$$

logo, agrupando  $1/6$  nas constantes, teremos a solução:

$$X(t) = (C_1, C_2) \begin{pmatrix} 4e^{2t} + 2e^{-4t} & e^{2t} - e^{-4t} \\ 8e^{2t} - 8e^{-4t} & 3e^{-4t} \end{pmatrix}$$

ou seja

$$\begin{aligned} x_1(t) &= C_1(4e^{2t} + 2e^{-4t}) + C_2(e^{2t} - e^{-4t}) \\ x_2(t) &= C_1(8e^{2t} - 8e^{-4t}) + C_2(3e^{-4t}) \end{aligned}$$

## 13 A equação diferencial $X' = AX$ (ordem( $A$ )= $n$ )

Se  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ , a equação diferencial vetorial toma a forma  $X' = AX$ , onde

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

é uma função diferenciável em relação ao

parâmetro  $t$  e  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ .

A solução geral de  $X' = AX$ , também neste caso, é da forma:

$$X(t) = C \exp(tA)$$

onde  $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  é uma matriz de constantes.

## 14 A equação linear não homogênea $X' = AX + f(t)$

Seja a equação diferencial<sup>7</sup> linear não homogênea  $X' = AX + f(t)$ . Como devemos integrar ambos os membros desta equação, usaremos  $u$  como a variável muda.

Multiplicando ambos os membros da equação  $X'(u) - A X(u) = f(u)$  pelo Fator Integrante  $\varphi(u) = e^{-uA}$ , obteremos:

$$e^{-uA} \{X'(u) - A X(u)\} = e^{-uA} f(u)$$

que também pode ser escrito como

$$\frac{d}{du} \{e^{-uA} X(u)\} = e^{-uA} f(u)$$

Integrando ambos os membros entre  $u = 0$  e  $u = t$ , teremos:

$$e^{-tA} X(t) - X(0) = \int_0^t e^{-uA} f(u) du$$

ou seja

$$e^{-tA} X(t) = X(0) + \int_0^t e^{-uA} f(u) du$$

logo, a solução da equação linear vetorial não homogênea, é:

$$X(t) = e^{tA} X(0) + e^{tA} \int_0^t e^{-uA} f(u) du$$

Alternativamente, poderíamos ter realizado a integração de ambos os membros entre  $u = t_0$  e  $u = t$ , para obter

$$e^{-tA} X(t) - e^{-t_0A} X(t_0) = \int_{t_0}^t e^{-uA} f(u) du$$

ou seja

$$e^{-tA} X(t) = e^{-t_0A} X(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-uA} f(u) du$$

Multiplicando ambos os membros desta última relação por  $e^{tA}$ , teremos:

$$X(t) = e^{tA} e^{t_0A} X(t_0) + e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-uA} f(u) du$$

Concluimos então que a solução de

$$X' = AX + f(t)$$

é da forma

$$X(t) = e^{(t-t_0)A} X(t_0) + e^{tA} \int_{t_0}^t e^{-uA} f(u) du$$

<sup>7</sup>Sistema de equações diferenciais ordinárias lineares não homogêneas